INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN CARAŞ-SEVERIN

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA JUDEȚEANĂ, 01.03.2008
BAREM CLASA A V-A

SUBIECTUL 1

Determinați cifrele a, b, c astfel încât:

$$\overline{abc2} + 3 \cdot \overline{abc} = \overline{4abc} + 1234.$$

Gazeta Matematică

Barem de corectare.

$\overline{abc2} = \overline{abc0} + 2 = 10 \cdot \overline{abc} + 2$

şi

$\overline{4abc} = 4000 + \overline{abc}$ **(4 puncte)**

Relația din ipoteză se scrie echivalent

$$10 \cdot \overline{abc} + 3 \cdot \overline{abc} - \overline{abc} = 4000 + 1234 - 2 \Leftrightarrow \overline{abc} = 436$$ **(3 puncte)**

NOTĂ:

1. Problemele propuse se pot rezolva şi prin alte metode.
2. Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.
3. Nu se acordă fracțiuni de punct.
4. Se acordă punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

Olimpiada județeană de matematică, 1 martie 2008
Barem de corectare şi notare, clasa a V-a

SUBIECTUL 2

Dacă numărul natural $A = x^{2008} \cdot 3^{48} + y^{2008} \cdot 2^{25}$ este divizibil cu 5, atunci numerele naturale x şi y sunt divizibile cu 5.

prof. Nicolae Stănică, Brăila

Barem de corectare.

Notăm cu $U(n)$ ultima cifră a numărului natural *n*.

Avem $U\left(x^{2008}\right), U\left(y^{2008}\right) \in \{0;1;5;6\}$. (2 puncte)

Apoi $U\left(3^{48}\right) = 1$ şi $U\left(2^{25}\right) = 2$. (2 puncte)

Atunci $U\left(x^{2008} \cdot 3^{48}\right) \in \{0;1;5;6\}$ şi $U\left(y^{2008} \cdot 2^{25}\right) \in \{0;2\}$ (1 punct)

Din cele de mai sus şi din faptul că *A* este divizibil cu 5, deducem că $x^{2008} \cdot 3^{48}$ şi $y^{2008} \cdot 2^{25}$ sunt divizibile cu 5 (1 punct)

Urmează că x^{2008} şi y^{2008} sunt divizibile cu 5 de unde rezultă că *x* şi *y* sunt divizibile cu 5 (1 punct)

NOTĂ:

1. Problemele propuse se pot rezolva şi prin alte metode.
2. Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.
3. Nu se acordă fracțiuni de punct.
4. Se acordă punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

Olimpiada județeană de matematică, 1 martie 2008
Barem de corectare şi notare, clasa a V-a

SUBIECTUL 3

Suma dintre cel mai mare şi cel mai mic număr natural, care se poate forma cu patru cifre nenule date este 11220. Să se afle suma celor patru cifre.

***

Barem de corectare.

Fie a, b, c, d cifrele nenule date astfel încât $a \geq b \geq c \geq d > 0$.
Atunci $\overline{abcd} + \overline{dcba} = 11220$. (2 puncte)

Deducem că $1001(a+d)+110(b+c)=11220$ (2 puncte)

de unde rezultă că suma $a+d$ este divizibilă cu 10. Cum a şi b sunt cifre nenule, în mod necesar $a+d=10$. (1 punct)

Obținem imediat că $b+c=11$ (1 punct)

şi în final $a+b+c+d=21$. (1 punct)

NOTĂ:

1. Problemele propuse se pot rezolva şi prin alte metode.
2. Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.
3. Nu se acordă fracțiuni de punct.
4. Se acordă punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

Olimpiada județeană de matematică, 1 martie 2008
Barem de corectare şi notare, clasa a V-a

SUBIECTUL 4

Fie mulțimile

$$A = \{2^0;\ 2^0 + 2^1;\ 2^0 + 2^1 + 2^2;\ 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3;\ ...\}$$

şi

$$B = \{3^0;\ 3^0 + 3^1;\ 3^0 + 3^1 + 3^2;\ 3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3;\ ...\}.$$

Determinați mulțimea $A \cap B$.

prof. Marius Damian, prof. Nicolae Stănică, Brăila

Barem de corectare.

Elementele mulțimii *A* sunt de forma

$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{k-1} = 2^k - 1,\ k \in \mathbb{N}^*$ (2 puncte)

şi elementele mulțimii *B* sunt de forma

$3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3 + ... + 3^{n-1} = \dfrac{3^n - 1}{2},\ n \in \mathbb{N}^*$ (2 puncte)

Observăm că $1 \in A \cap B$. (1 punct)

Arătăm că $A \cap B = \{1\}$. Dacă mulțimile *A* şi *B* ar mai avea un element comun diferit de 1, atunci ar exista $k, n \in \mathbb{N}$, $k, n \geq 2$ astfel încât

$$2^k - 1 = \frac{3^n - 1}{2} \Leftrightarrow 2^{k+1} = 3^n + 1.$$

Pentru orice $k \geq 2$, avem $2^{k+1} = M_8$ şi

$$3^n + 1 = \begin{cases} M_8 + 2, \text{ dacă } n \text{ este par} \\ M_8 + 4, \text{ dacă } n \text{ este impar} \end{cases},$$

deci egalitatea $2^{k+1} = 3^n + 1$ este imposibilă, oricare ar fi $k, n \in \mathbb{N}$, $k, n \geq 2$.
În concluzie, $A \cap B = \{1\}$. (2 puncte)

NOTĂ:

1. Problemele propuse se pot rezolva şi prin alte metode.
2. Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.
3. Nu se acordă fracțiuni de punct.
4. Se acordă punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.